

Заключительный этап

Авторские решения

10 класс

1. Ретроградная Венера. Была ли Венера ретроградной (в попятном движении) 02.02.2020, если известно, что 20 марта 2022 будет её максимальная утренняя западная элонгация? (Б. Михайлов)

Решение

Попытное движение внутренней планеты наблюдается в окрестностях нижнего соединения, когда с точки зрения земного наблюдателя планета «обгоняет» Солнце, имея большую угловую скорость. Поэтому для определения ретроградности Венеры достаточно понять, насколько далеко от момента 02.02.2020 было её нижнее соединение.

Между 20.03.2022 и 02.02.2020 прошло 777 дней, или с хорошей точностью 1,33 синодического периода Венеры. За «лишнюю» треть синодического периода Венера перемещается из западной элонгации в окрестности верхнего соединения с Солнцем, то есть она **не могла быть** в попятном движении 2 февраля 2020 года.

Более точные вычисления (например, определение гелиоцентрического угла между Землёй и Венерой) подтверждают этот вывод, хоть и не являются обязательными для получения полного балла.

2. Комета Бернардинелли-Бернштейна. Комета C/2014 UN271 Бернардинелли-Бернштейна — долгопериодическая крупная комета из Облака Оорта с эллиптической орбитой с очень большим эксцентриситетом, движущаяся почти перпендикулярно эклиптике. Большая полуось её орбиты равна 30983 а.е. Она пройдёт перигелий 23 января 2031 года на расстоянии 10,95 а.е. от Солнца. Оцените звёздную величину её ядра в перигелии, считая его диаметр равным 100 км, а альбедо – 0,1. ~~На каком расстоянии от Солнца она находится сейчас? На каком расстоянии от Солнца она находилась летом 1950 года?~~ (Б. Михайлов)

Решение

Для определения звёздной величины кометы определим сначала её светимость. Комета отражает 0,1 от падающего на неё света, поэтому $L = L_{\odot} / (4\pi R_{\text{п}}^2) \cdot \pi r^2 \cdot A = 9 \cdot 10^9 \text{ Вт}$.

Для оценки будем считать, что комета отражает свет равномерно в полусферу, её фаза при наблюдении с Земли с хорошей точностью равна 1, а расстояние от Земли до кометы примерно равно её перигелийному расстоянию (так как орбита комета перпендикулярна эклиптике, учёт радиуса орбиты Земли внесёт очень малую погрешность).

Тогда освещённость от кометы на Земле равна $E = L / (2\pi R_n^2) = 5,3 \cdot 10^{-16}$ Вт, что по закону Погсона соответствует звёздной величине **+19,3^m**.

Решением методической комиссии олимпиады второй и третий вопросы данной задачи сняты с рассмотрения как не вполне соответствующие требованиям к знаниям школьников 10 класса. Итоговый максимальный балл за задачу – 5 баллов за вопрос № 1.

Методическая комиссия приносит свои извинения участникам олимпиады.

3. Параллактический астероид. Астроном наблюдает параллактическую окружность звезды X с некоего астероида в Солнечной системе. Наклонение орбиты астероида мало, аргумент перицентра равен $31^\circ 41' 59''$, долгота восходящего узла $26^\circ 53' 5''$. Эклиптическая долгота звезды X составляет $58^\circ 35' 4''$, эклиптическая широта $+60^\circ$. Оцените эксцентриситет орбиты астероида. (В. Плужникова)

Решение

Если бы эксцентриситет орбиты равнялся 0 (орбита астероида круговая), мы бы наблюдали параллактический эллипс нашей звезды, причём отношение большой и малой полуосей было бы равно синусу эклиптической широты звезды ($\sin \theta_e = \sqrt{3}/2$).

Но поскольку мы наблюдаем окружность, сжатие эллипса из-за эклиптической широты должно компенсироваться сжатием этого же эллипса из-за ненулевого эксцентриситета орбиты нашего астероида. Иначе говоря, гипотетический наблюдатель на звезде видел бы орбиту астероида как окружность, несмотря на её ненулевой эксцентриситет.

Это означает, что соотношение малой и большой полуосей орбиты астероида должно в точности равняться вычисленному нами коэффициенту сжатия $\sqrt{3}/2$. Тогда эксцентриситет орбиты равен $e = (1 - b/a)^{1/2} = \mathbf{0,366}$.

Остальные параметры орбиты астероида, равно как и эклиптическая долгота звезды, на решение задачи не влияют и предназначены исключительно для введения участников олимпиады в состояние замешательства и паники.

4. Кто похитил Джоуля, или загадка от Юпитера. Комета Брука (1889 V) – комета, вращавшаяся по орбите с периодом 29.2 года до июля 1886 года. В июле она прошла слишком близко от Юпитера. Известно, что её период обращения уменьшился до 7.1 года, при этом её орбита стала полностью лежать в орбите Юпитера. Какое максимальное количество энергии мог «похитить» Юпитер? (Б. Михайлов)

Решение

Как известно, полная энергия орбитального движения определяется исключительно большой полуосью орбиты и равна $E = -GMm / 2a$.

По известным периодам обращения кометы до и после взаимодействия с Юпитером мы можем посчитать исходную и результирующую большие полуоси её орбит:

$$a_0 = (29.2)^{2/3} = 9.48 \text{ а.е.}, \quad a_f = (7.1)^{2/3} = 3.7 \text{ а.е.}$$

Для вычисления энергий оценим массу кометы как 10^{-9} массы Земли, то есть $6 \cdot 10^{15}$ кг. Участники могут использовать другие разумные предположения о массе в пределах от 10^{14} до 10^{16} кг. Соответственно, полная исходная и результирующая энергия кометы равны

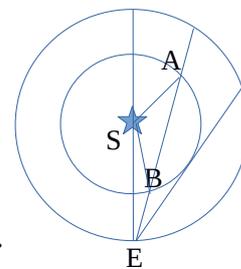
$$E_0 = -2,8 \cdot 10^{23} \text{ Дж}, \quad E_f = -7,2 \cdot 10^{23} \text{ Дж}.$$

В результате получаем, что «похищенная» Юпитером орбитальная энергия составляет $\Delta E = 4,4 \cdot 10^{23}$ Дж. Разумеется, при различных оценках массы кометы итоговая величина энергии может отличаться от приведённого ответа.

5. Вулканоид. Вулканоиды – гипотетическая группа астероидов, лежащих внутри орбиты Меркурия. Из-за яркости Солнца очень трудно обнаружить объект, находящийся на небе ближе, чем в 12 градусах от него. Предположим, существует такой астероид, максимальная элонгация которого равна 13 градусам. Сколько дней в году он доступен для наблюдения? (Б. Михайлов)

Решение

Для оценки будем считать орбиту астероида круговой. Нам нужно определить промежуток времени, в течение которого с точки зрения наблюдателя на Земле угловое расстояние между астероидом и Солнцем составляет от 12° до 13° . На рисунке разница между углами для наглядности сильно преувеличена.



Максимальный угол элонгации определяет радиус орбиты астероида: $R = 1 \text{ а.е.} \cdot \sin \alpha = 0,225 \text{ а.е.}$

В треугольнике SEA мы знаем две стороны ($SA = R$, $SE = 1 \text{ а.е.}$) и угол $E = 12^\circ$. По теореме синусов $\sin A = \sin E / 0,225$, и угол A равен $67,5^\circ$. Значит, угол ESA равен $180^\circ - 12^\circ - 67,5^\circ = 100,5^\circ$.

Аналогичными рассуждениями для треугольника SEB получим, что угол B = $112,5^\circ$, и угол ESB равен $180^\circ - 12^\circ - 112,5^\circ = 55,5^\circ$. Значит, угол BSA составляет 45° , что составляет $\frac{1}{8}$ от полного оборота астероида.

Учитывая и противоположную изображённой на рисунке элонгацию, получаем, что мы видим астероид в течение $\frac{1}{4}$ от его орбитального периода, который составляет по третьему закону Кеплера $(0,225)^{3/2} = 0,106$ года. Итоговый ответ – 0,0267 года или около **10 дней**.

6. Английские проблемы требуют английских решений. Один богатый англичанин купил прибор для подогревания горячего чая. Он состоит из белой ($A = 0,9$) параболической тарелки радиусом 6 дюймов и чёрной ($A = 0,1$) тонкой металлической чашки радиусом 1 дюйм в фокусе зеркала. Объём чашки равен 3 жидким унциям. Чему должна быть равна мощность теплопотерь чашки, чтобы чай не остывал? (1 дюйм = 2,54 см; 1 жидкая унция = 28,41 мл). (Б. Михайлов)

Решение

Поскольку чашка расположена в фокусе параболической тарелки, на чашке концентрируется весь свет, отражённый тарелкой, то есть 90% солнечного света, на тарелку попавшего. Определим световой поток, попадающий на тарелку:

$$W_0 = E \cdot \pi R^2 = 43,8 \text{ Вт.}$$

Здесь за освещённость E взято значение 600 Вт/м^2 (не 1370 Вт/м^2), поскольку чай мы греем очевидно на поверхности Земли, и необходимо учитывать рассеяние части световой энергии Солнца атмосферой.

Тарелка отражает 90% от потока W_0 , концентрируя эту энергию на чашку, а чашка поглощает 90% от света, попавшего на неё. То есть «входящий» поток световой энергии составляет

$$W_{\text{in}} = W_0 \cdot 0,9 \cdot 0,9 = 35,4 \text{ Вт.}$$

Заметим, что тем самым мы автоматически учли (правда, с коэффициентом 0,81, а не 0,9, но при нашей точности это не принципиально) поток световой энергии Солнца, попадающий непосредственно на чашку без отражения от тарелки.

Для того, чтобы чай не грелся и не остывал, мощность теплопотерь должна совпадать с мощностью входящего светового потока, то есть ответ задачи — **35,4 Вт**.